

p -幂零群的一个等价条件*

黄裕建¹, 李样明²

(1. 广东轻工职业技术学院, 广东 广州 510300;

2. 广东教育学院数学系, 广东 广州 510310)

摘要: 研究了有限群 G 的细致结构。通过对 G 的 Sylow p -子群的一类子群加条件, 利用极小反例的方法, 得到了 G 为 p -幂零群的一个等价条件, 从而推广、统一了现有的结果。

关键词: 弱 s -置换子群; p -幂零群; Sylow-子群

中图分类号: O152.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 05-0014-04

本文所指的群均为有限群。采用记号 G 表示一个群, p 表示一个素数, π 表示一个素数集, $\pi(G)$ 表示能整除 $|G|$ 的素数的全体。对 $p \in \pi(G)$, G_p 表示 G 的任意 Sylow p -子群, $S_p(G)$ 表示 G 的 Sylow p -子群的全体。其余符号及术语是标准的, 见文 [1]。

群 G 的子群 H 与 K 称为是置换的, 如果 $HK = KH$ 。显然群 G 的两个子群 H 与 K 是置换的当且仅当 HK 是 G 的子群。设 $H \leq G$, 称 H 在 G 中是拟正规的, 如果 H 与 G 的每一个子群置换^[2]; 称 H 在 G 中是 s -置换的 (s -permutable), 或 s -拟正规的 (s -quasinormal), 或 π -拟正规的 (π -quasinormal), 若对 $\forall p \in \pi(G), \forall G_p \in S_p(G), H$ 与 G_p 是置换的^[3]。易证, 若 H, K 均为 G 的 s -置换子群, 则 $\langle H, K \rangle$ 也为 G 的一个 s -置换子群。因此对给定 G 的一个子群 H , 由 G 的包含在 H 中的所有 s -置换子群生成的子群就是 H 包含的 G 的最大的 s -置换子群, 记为 H_{sc} , 称为 H 在 G 中的 s -核 (s -core)。称 H 在 G 中是 c -正规的 (c -normal), 如果存在 G 的正规子群 K 使 $G = HK$ 且 $H \cap T \leq H_c$, 其中 H_c 是 H 在 G 的正规核^[4]。

Skiba^[5]引入了弱 s -置换子群, 它真正涵盖了 s -置换子群及 c -正规子群。

定义 1 设 $H \leq G$, 称 H 在 G 中是弱 s -置换的, 若 G 有一个次正规子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H \cap T \leq H_{sc}$ 。

定义 2 设 $H \leq G$, 称 H 在 G 中是可添加的 (supplemented), 若存在 G 的子群 K 使得 $G = HK$ 。

进一步, 若 K 是 p -幂零的, 则称 H 在 G 中有 p -幂零的补 (N_p -supplemented)。

通过对有限群 G 子群加条件而得到群 G 的结构是有限群研究中常用的方法。通常人们是对 G 的 Sylow-子群的极大子群或极小子群加条件 (如假设 G 的 Sylow-子群的极大子群或极小子群为 G 的 s -置换子群或 c -正规子群等) 而得到群 G 的细致结构^[6-12]。Skiba^[5]通过假设 G 的所有 Sylow-子群的某一类子群为 G 的弱 s -置换子群而得到了 G 为超可解群的等价条件, 从而统一了近年来人们在有限超可解群方面的研究工作。在本文中, 通过假设 G 的一个 Sylow p -子群的某一类子群为 G 的弱 s -置换子群而得到了 G 为 p -幂零的等价条件, 其中 p 是 $\pi(G)$ 中的最小者, 从而统一了近年来人们在有限 p -幂零群方面的研究工作。

先给出一些引理。

引理 1^[3] 设 G 为一个群, H 为 G 的一个 s -置换子群, 则

- (a) H 为 G 的次正规子群;
- (b) 若 $H \leq K \leq G$, 则 H 为 K 的 s -置换子群;
- (c) 设 N 为 G 的一个正规子群, 则 HN/N 为 G/N 的 s -置换子群;
- (d) 若 H 为 p -群, 则 $H \leq O_p(G)$, 且 $N_c(H) \geq O^p(G)$ 。

仿照文 [5, Lemma 1.4] 的证明可得

引理 2 设 P 为 G 的一个 Sylow p -子群, 若 P 的每个极大子群在 G 中都有 p -幂零的补, 则 G 为 p -幂零的。

* 收稿日期: 2007-09-12

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (06023728); ARF (GDEI) 资助项目

作者简介: 黄裕建 (1969 年生), 女, 讲师; 通讯联系人: 李样明; E-mail: liyangming@gdei.edu.cn

1 主要结论及证明

先讨论极大子群情形。

定理 1 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群。若 P 的每一个极大子群在 G 中或者有 p -幂零的补, 或是弱 s -置换的, 则 G 为 p -幂零的。

证明 假设定理不成立, G 为一个极小反例, 我们用如下数步来导出矛盾。

(1) G 有唯一的极小正规子群, 记为 N , 且 G/N 是 p -幂零的, $\Phi(G) = 1$ 。

设 N 为 G 的一个极小正规子群, 考虑商群 G/N , 我们来证明 G/N 满足定理的条件。设 M/N 为 PN/N 的一个极大子群, 则存在 P 的一个极大子群 P_1 使得 $M = P_1N$ 。由假设 P_1 在 G 中或者有 p -幂零的补, 或者是弱 s -置换的。若 P_1 在 G 中有 p -幂零的补, 记为 K_1 , 则易见 K_1N/N 就是 M/N 在 G/N 中的 p -幂零的补。假设 P_1 在 G 中是弱 s -置换的, 从而存在 G 的一个次正规子群 K_1 , 使得 $G = P_1K_1$ 且 $P_1 \cap K_1 \leq (P_1)_{sG}$ 。则 $G/N = M/N \cdot K_1N/N$ 。易见 K_1N/N 是 G/N 的次正规子群。由于 $P_1 \cap N = P \cap N$ 是 N 的 Sylow p -子群, 故 $(|N:P_1 \cap N|, |N:K_1 \cap N|) = 1$, 这样 $(P_1 \cap N)(K_1 \cap N) = N = N \cap G = N \cap (P_1K_1)$ 。由文 [13, A, 12] 知, $(P_1N) \cap (K_1N) = (P_1 \cap K_1)N$ 。应用引理 1 (c) 即有

$$(P_1N)/N \cap (K_1N)/N = (P_1N \cap K_1N)/N = (P_1 \cap K_1)N/N \leq (P_1)_{sG}N/N \leq (P_1N/N)_{sG}$$

故 M/N 在 G/N 中是弱 s -置换的, 从而 G/N 满足定理的假设。由 G 的选择知 G/N 是 p -幂零的。

N 的唯一性及 $\Phi(G) = 1$ 是显然的。

(2) $O_p(G) = 1$ 。

若 $O_p(G) \neq 1$, 则由 (1) 知, $N \leq O_p(G)$ 且 G/N 是 p -幂零的。从而 G 是 p -幂零的, 矛盾!

(3) $O_p(G) = 1$ 。

若 $O_p(G) \neq 1$, 则由 (1) 知 $N \leq O_p(G)$, 且存在 G 的极大子群 M 使得 $G = NM$, $N \cap M = 1$, 且 M 为 p -幂零的。易见 $N = O_p(G)$ 。若 P 的极大子群 A 包含 N , 则 $G = NM = AM$, 即 A 在 G 中有 p -幂零的补 M , 而由引理 2 知 P 至少存在一个极大子群 V 在 G 中有 p -幂零的补, 显然 $N \leq V$, 从而 V 在 G 中是 s -置换的, 故存在 G 的次正规子群 T 使得 $G = VT$ 且 $V \cap T \leq V_{sG}$ 。

若 $V_{sG} = 1$, 则 $|T_p| = p$, 从而由文 [1, IV, Satz 2.8], T 为 p -幂零的。因为 $T_p \text{ char } T \triangleleft \triangleleft G$, 故

$T_p \triangleleft G$, 即有 $T_p \leq O_p(G) = 1$ 。从而 $T = T_p$, 即 $G = VT$ 为一个 p -群, 矛盾!

故假设 $V_{sG} \neq 1$ 。由 V_{sG} 在 G 中是 s -置换的, $V_{sG} \leq O_p(G) = N$, 故 $V_{sG} \leq V \cap N$ 。若 $N \leq T$, 则 $T \cap V \leq V_{sG} \leq N \cap V \leq T \cap V$ 。故 $T \cap V = V_{sG} = N \cap V$ 。由于 $N_G(V_{sG}) \geq O^p(G)$, $N \cap V \triangleleft P$, 故 $V_{sG} \triangleleft G$ 。由 N 的极小性知 $N = V_{sG} \leq V$, 这与 V 的选取矛盾! 故 N 不包含于 T 。这样 $N \cap T_G = 1$ 。而 $T_G \geq O^p(G)$, 故 G/T_G 为一个 p -群。由 $G \cong G/(N \cap T_G) \leq G/N \times G/T_G$ 知, G 为 p -幂零的, 矛盾!

(4) 由引理 2 知, P 存在极大子群 W 在 G 中无 p -幂零的补。由假设知 W 在 G 中是弱 s -置换的, 从而存在 G 的次正规子群 T 使得 $G = WT$ 且 $W \cap T \leq W_{sG}$ 。

若 $W_{sG} = 1$, 则 $|T_p| = p$, 由文 [1, IV, Satz 2.8] 知 T 为 p -幂零的, 这与 W 的选取矛盾, 故 $W_{sG} \neq 1$ 。而由 W_{sG} 为 G 的 s -置换的子群知 $W_{sG} \leq O_p(G) = 1$, 矛盾!

下面讨论一般情形, 即给出我们的主要结论。

定理 2 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群。则 G 为一个 p -幂零群当且仅当 P 存在子群 D 使得 $1 < |D| < |P|$, 且对 P 的任意阶为 $|D|$ 或 $2|D|$ (当 P 为非交换 2-群且 $|P:D| > 2$) 的子群 H , H 在 G 中或者有 p -幂零的补或者是弱 s -置换的。

证明 必要性是显然的, 只要证明充分性。假设定理不成立, G 是一个极小反例, 则

(1) $O_p(G) = 1$ 。

若 $O_p(G) \neq 1$, 则由文 [5, Lemma 2.2] 得 $G/O_p(G)$ 满足定理的假设, 由 G 的选择知 G 是 p -幂零的, 矛盾!

(2) $|D| > p$ 。

假设 $|D| = p$ 。因为 G 不是 p -幂零的, 因此 G 有一个极小非 p -幂零的子群 G_1 。由文 [1], $G_1 = [P_1]Q$, 其中 P_1, Q 分别为 G_1 的 Sylow p -子群和 Sylow q -子群。记 $\Phi = \Phi(P_1)$ 。设 X/Φ 为 P_1/Φ 的 p 阶子群, $x \in X \setminus \Phi$, $L = \langle x \rangle$ 。由文 [1], L 为 p 阶或 4 阶的。从而 L 在 G 中或者有 p -幂零的补或者是弱 s -置换的, 由文 [5, Lemma 2.2] 知 L 在 G_1 中或者有 p -幂零的补或者是弱 s -置换的。在前一种情形下 L 在 G_1 中的 p -幂零的补 $T \neq G_1$, 从而 $T\Phi \neq G_1$ 。因此 $|G_1/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$ 。故 $T\Phi/\Phi \triangleleft G_1/\Phi$, 从而由文 [1], $P_1/\Phi \cap T\Phi/\Phi = 1$ 。这样就有 $|P_1/\Phi| = p$, 故 P_1 为循环的。由文 [1, IV, Satz 2.8], G_1 为 p -幂零的, 这与 G_1 的选择矛盾。假设 L

在 G_1 中是弱 s -置换的. 若 L 在 G_1 中不是 s -置换的, 则由文 [5, Lemma 2.10], G_1 有一个正规子群 W 得 $G_1 = LW$ 且 $|G_1:W| = p$. 因为 G_1 为极小非 p -幂零群, 故 W 为 p -幂零的. 由 $W_q \text{ char } W \triangleleft G_1$ 知 $W_q \triangleleft G_1$, 从而 G_1 为 p -幂零的, 矛盾! 因此 L 在 G_1 中是 s -置换的, 由引理 1 (c) 知, $X/\Phi = L\Phi/\Phi$ 在 G_1/Φ 中是 s -置换的. 应用文 [5, Lemma 2.10] 及文 [1], 即有 $|P_1/\Phi| = p$, 从而 G_1 为 p -幂零的, 矛盾!

(3) $|P:D| > p$.

由定理 1 即得.

(4) P 的 $|D|$ 阶和 $2|D|$ 阶子群 (当 P 为非交换 2-群时) 在 G 中或者有 p -幂零的补, 或者是 s -置换的.

假设 $H \leq P$, $|H| = |D|$. 若 H 在 G 中不为 s -置换的且无 p -幂零的补, 则由文 [5, Lemma 2.10] 知存在 G 的正规子群 M 使得 $|G:M| = p$. 由 (3) 知, M 满足定理的假设. 由 G 的极小性即有 M 为 p -幂零的. 从而 G 为 p -幂零的, 矛盾!

$|H| = 2|D|$ 情形类似可得.

(5) 若 $N \leq P$, N 在 G 中是极小正规的, 则 $|N| \leq |D|$.

假设 $|N| > |D|$. 因为 $N \leq P$, 故 N 为初等交换的. 若 N 有 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中有 p -幂零的补 T , 则 $G = HT = NT$, 从而 $N \cap T \triangleleft G$. 由 N 的极小性知, $N \cap T = 1$ 或 $N \cap T = N$. 若 $N \cap T = 1$, 则 $N = N \cap HT = H(N \cap T) = H$, 矛盾! 若 $N \cap T = N$ 则 $G = HT = T$, 即 G 为 p -幂零的, 矛盾! 故 N 的所有 $|D|$ 阶子群均在 G 中是弱 s -置换的. 应用文 [5, Lemma 2.11] 得, N 有一个极大子群 $N_1 \triangleleft G$. 由 N 的极小性, 故 $N_1 = 1$, 从而 $|N| = |D| = p$, 矛盾!

(6) 假设 $N \leq P$, N 为 G 的极小正规子群, 则 G/N 为 p -幂零的.

若 $|N| < |D|$, 则由文 [5, Lemma 2.10] 可知, G/N 满足定理的假设. 从而 G/N 为 p -幂零的, 得证. 故由 (5), 可假设 $|N| = |D|$. 下证 P/N 的每个 p 阶或 4 阶子群在 G 中是 s -置换的.

设 $K/N \leq P/N$ 且 $|K/N| = p$. 由 (2) 知 N 非循环的, 从而 K 也是非循环的, 因此存在 K 的极大子群 $L \neq N$, 这样 $K = LN$. 显然 $|L| = |N| = |D|$, 由 (4) 知 L 在 G 中是 s -可置换的. 由引理 1 (b), $K/N = LN/N$ 在 G/N 中是 s -置换的.

当 $p = 2$, P 为非交换 2-群时, 对 P/N 的 4 阶

子群 X/N 类似讨论可得 X/N 为 G/N 的 s -置换子群. 故 G/N 满足定理假设, 从而 G/N 为 p -幂零的.

(7) $O_p(G) = 1$.

假设 $O_p(G) \neq 1$, 则取 G 的包含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群 N . 则易见 N 为 G 的包含于 $O_p(G)$ 中的 G 的唯一极小正规子群且 $N = O_p(G)$, 而且存在 G 的极大子群 M 得 $G = NM$, $N \cap M = 1$, M 为 p -幂零的.

设 $H \leq P$, $|H| = |D|$. 若 H 在 G 中无 p -幂零的补, 故由 (4) 知 H 在 G 中是 s -置换的, 从而 $H \leq O_p(G) = N$. 由 (5) 知 $H = N$, 从而 M 为 H 在 G 中的 p -幂零的补, 矛盾! 由此得出 P 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中均有 p -幂零的补. 由 (3) 可知 P 的极大子群均含有 $|D|$ 阶子群, 从而 P 的每个极大子群在 G 中均有 p -幂零的补, 应用引理 2, 即导出矛盾.

(8) 设 H 为 P 的任一个 $|D|$ 阶子群, 若 H 在 G 中为 s -置换的, 则 $H \leq O_p(G) = 1$, 矛盾! 故 P 的任一个 $|D|$ 阶子群 G 中均有 p -幂零的补, 应用引理 2, 即得出 G 为 p -幂零的, 矛盾!

推论 1 假设群 G 的每一个非循环的 Sylow-子群 P 有一个子群 D 使得 $1 < |D| < |P|$ 且 P 的所有 $|D|$ 阶及 $2|D|$ 阶 (若 P 为非交换 2-群, 且 $[P:D] > 2$) 子群在 G 中或者有超可解的补, 或者为弱 s -置换的, 则 G 是一个 Sylow 塔群.

由定理 2 可以得到下列这些关于 p -幂零群的结论, 由此可以看出我们的结论的一般性.

推论 2 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群. 若则 P 的所有极大子群均为 G 的弱 s -置换子群, 则 G 为一个 p -幂零群.

推论 3^[4,12] 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群. 若则 P 的所有极大子群均为 G 的 c -正规的, 则 G 为 p -幂零群.

推论 4^[6-7] 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群. 若则 P 的所有极大子群均为 G 的 π -拟正规的子群, 则 G 为 p -幂零群.

推论 5^[4,12] 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群. 若则 P 的所有极小子群均为 G 的 c -正规子群, 则 G 为 p -幂零群.

推论 6^[6-7] 设 G 为一个群, p 为整除 $|G|$ 的最小素数, P 为 G 的一个 Sylow p -子群. 若则 P 的所有极小子群均为 G 的 π -拟正规子群, 则 G 为 p -幂零群.

参考文献:

- [1] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1967: 1 – 500.
- [2] ORE O. Contributions to the theory of finite groups [J]. Duke Math J, 1939, 5: 431 – 460.
- [3] KEGAL O H. Sylow Gruppen and subnormalteiler endlicher gruppen [J]. Math Z, 1962, 78: 205 – 221.
- [4] WANG Y. On c -normality and its properties [J]. J Algebra, 1996, 180: 954 – 965.
- [5] SKIBA A N. On weakly s -permutable subgroups of finite groups [J]. J Algebra, 2007, 315: 192 – 209.
- [6] LI Y, WANG Y. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups [J]. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 337 – 341.
- [7] LI Y, WANG Y, WEI H. The influence of π -quasinormality of some subgroups of a finite group [J]. Arch Math, 2003, 81: 245 – 252.
- [8] WEI H. On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups [J]. Comm Algebra, 2001, 29(5): 21 – 93.
- [9] WEI H, WANG Y, LI Y. On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups II [J]. Comm Algebra, 2003, 31(10): 4807 – 4816.
- [10] SRINIVASAN S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. Israel J Math, 1980, 35: 210 – 214.
- [11] LI D, GUO X. The influence of c -normality of subgroups on structure of finite groups [J]. Comm Algebra, 1998, 26(6): 1913 – 1922.
- [12] LI D, GUO X. The influence of c -normality of subgroups on structure of finite groups II [J]. J Pure App Algebra, 2000, 150: 53 – 60.
- [13] DOERK K, HAWKES T. Finite Soluble Groups [M]. Berlin-New York: de Gruyter, 1992: 1 – 800.

An Equivalent Condition of the p -nilpotent GroupHUANG Yu-jian¹, LI Yang-ming²

(1. Guangdong Industry Technical College, Guangzhou 510300, China;

2. Department of Mathematics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510310, China)

Abstract: For the purpose of studying the detail structure of a finite group G , some proper conditions are implemented to a kind of subgroups of Sylow p -subgroup of G , then an equivalent condition of G being a p -nilpotent group is gotten by applying the minimal counterexample method. This result is a generalization of recent results in this aspect.

Key words: weakly s -permutable subgroup; p -nilpotent group; Sylow subgroup

(上接第 13 页)

An Extended Mutualism-competition Model and its Qualitative Analysis

WU Hong, WANG Yuan-shi

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A previous competition and mutualism model of two species is extended to a general competition and mutualism model of multiple species. By the analysis of the general competition and mutualism model of two species, it is proved that mutualism promotes coexistence and carrying capacities of the competitors. The mechanism that how mutualism promotes coexistence and carrying capacities of the competitors is shown by analyzing a special competition and mutualism model. It is also shown that both the species benefit from the mutualism at low density.

Key words: species' mutualism; competition model; periodic orbit; stability